Academia Română
Institutul de matematică "Simion Stoilow"

TEZA DE DOCTORAT

– rezumat –

Aplicaţii ale dualităţii în unele probleme de optimizare infinit dimensionale

Coordonator ştiinţific:
CS I dr. Dan Tiba

Doctorand:
Diana-Rodica Merluşcă

Bucureşti, 2014

Cuprinsul tezei

Cuprinsul rezumatului

Introducere

Inegalităţile variaţionale reprezintă un subiect de interes în matematică, fizică sau informatică, având aplicaţii variate. Una din problemele care se formulează cu ajutorul inegalităţilor variaţionale este problema obstacolului. Rezolvarea problemei de obstacol înseamnă a rezolva, de fapt, o clasă de probleme de optimizare cu restricţii sau de probleme de frontieră liberă, aşa cum au remarcat Lewy şi Stampacchia [90].

În această lucrare prezentăm algoritmi de rezolvare bazaţi pe dualitate pentru probleme variaţionale asociate ecuaţiilor şi inecuaţiilor variaţionale eliptice. Menţionăm că rezultatele originale prezentate în Capitolul 2 au fost publicate în articolele Merluşcă [100], [101] şi [103], iar rezultatele originale din Capitolul 3 au fost publicate în Merluşcă [102]. Metodologia folosită dezvoltă idei introduse în Sprekels şi Tiba [128], Neittaanmaki, Sprekels şi Tiba [107].

Cuvinte cheie: problema obstacolului, Teorema lui Fenchel, problema aproximantă, metode de aproximare, operator biharmonic.

1 Preliminarii matematice

În acest capitol se descriu pe scurt rezultate şi noţiuni matematice folosite în continuare, referitoare la analiză funcţională, spaţii Sobolev, probleme de optimizare, teoria dualităţii, ecuaţii şi inecuaţii variaţionale, metode de aproximare.

2 Probleme de ordinul doi

Tratăm problema obstacolului de ordinul al doilea cu obstacol nul sau nenul, aplicând o metodă bazată pe dualitate şi arătăm că este suficient să rezolvăm o problemă de minimizare pătratică finit dimensională pentru a obţine soluţia aproximativă a problemei. În literatura matematică există abordări bazate pe teoria dualităţii, diferite de metodele pe care le introducem în această teză. Ito şi Kunisch [79], au introdus o strategie de tip "primal-dual active set" şi au demonstrat că metoda este echivalentă cu metoda semineteda a lui Newton. O analiză utilizând teorema lui Fenchel şi metoda semineteda a lui Newton a fost utilizată în articolul lui Hintermüller şi Rösel [78] pentru a obţine rezultate asupra problemelor de contact semistatice.

2.1 Metoda de dualitate pentru probleme cu obstacol nul

Discutăm problema obstacolului definită pe un spaţiu Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$, cu $p > dim\ \Omega$. Ideea pe care o prezentăm este de a rezolva această problemă cu ajutorul unei probleme aproximante şi a dualei acesteia. Aplicăm Teorema de dualitate al lui Fenchel şi analizăm problema duală obţinută. Arătăm că soluţia problemei duale aproximante este o combinaţie liniară de distribuţii Dirac. În concluzie, rezolvând o problemă de minimizare pătratică, putem construi soluţia aproximativă a problemei primale aplicând o formulă de corespondenţă dintre soluţia duală şi cea primală.

Considerăm că $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ este o mulţime deschisă şi mărginită cu proprietatea tare Lipschitz locală. Studiem problema de obstacol

$$\min_{y \in W_0^{1,p}(\Omega)_+} \left\{ \frac{1}{2} \|y\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \int_\Omega fy \right\} \tag{1}$$

unde $f \in L^1(\Omega)$, $p > n = dim\ \Omega$, şi $W_0^{1,p}(\Omega)_+ = \{y \in W_0^{1,p}(\Omega) : y \geq 0 \text{ in } \Omega\}$.

Cu Teorema Sobolev avem $W^{1,p}(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$ şi are sens să considerăm următoarea problemă aproximantă

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \|y\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \int_\Omega fy \ \ : \ y \in W_0^{1,p}(\Omega); y(x_i) \geq 0, i = 1, 2, \ldots, k \right\} \tag{2}$$

unde $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \Omega$ este o mulţime densă în Ω, căreia nu i se impun condiţii de nedegenerare sau uniformitate ca în teoria elementului finit. Petru orice $k \in \mathbb{N}$, notăm $C_k = \{y \in W_0^{1,p}(\Omega) : y(x_i) \geq 0, i = 1, 2, \ldots, k\}$ conul închis şi convex.

Propozitia 2.1. *Problema* (1) *admite soluţie unică* $\bar{y} \in W_0^{1,p}(\Omega)_+$ *şi problema* (2) *are o unică soluţie* $\bar{y}_k \in C_k$*, pentru orice* $k \in \mathbb{N}$.

Mai mult, obţinem următorul rezultat de aproximare

Teorema 2.2. *Şirul* $\{\bar{y}_k\}_k$ *al soluţiilor problemelor* (2)*, pentru* $k \in \mathbb{N}$*, este un şir tare convergent în* $W^{1,p}(\Omega)$ *la unica soluţie* $\bar{y}$ *a problemei* (1).

Aplicăm Teorema de dualitate a lui Fenchel pentru a obţine problemea duală asociată problemei (2). Pentru a realiza acest lucru, considerăm funcţionala

$$F(y) = \frac{1}{2} \|y\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \int_\Omega fy, \quad y \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3}$$

Fie q exponentul conjugat a lui p. Folosind definiţia conjugatei convexe şi faptul că aplicaţia de dualitate $J : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,q}(\Omega)$ este operator univoc şi bijectiv calculăm conjugata convexă a acestei funcţionale si obţinem $F^*(y^*) = \frac{1}{2} \|f + y^*\|^2_{W^{-1,q}(\Omega)}$.

Considerăm funcţionala $g_k = -I_{C_k}$. Atunci, conjugata concavă este

$$g_k^{\bullet}(y^*) = \inf\{(y, y^*) - g_k(y) : y \in C_k\} = \begin{cases} 0, & y^* \in C_k^* \\ -\infty, & y^* \notin C_k^* \end{cases}$$

unde $C_k^* = \{y^* \in W^{-1,q}(\Omega) : (y^*, y) \geq 0, \forall y \in C_k\}$.

Lema 2.3. *Conul polar al lui C_k este*

$$C_k^* = \left\{ u = \sum_{i=1}^k \alpha_i \delta_{x_i} : \alpha_i \geq 0 \right\}$$

unde δ_{x_i} sunt distribuţiile Dirac concentrate în $x_i \in \Omega$, adică $\delta_{x_i}(y) = y(x_i)$, $y \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Cum domeniul lui g_k este $D(g_k) = C_k$ şi funcţionala F rămâne continuă pe conul convex şi închis C_k, ipotezele Teoremei lui Fenchel sunt satisfăcute. Atunci

$$\min_{y \in C_k} \left\{ \frac{1}{2} \|y\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \int_\Omega fy \right\} = \max_{y^* \in C_k^*} \left\{ -\frac{1}{2} \|y^* + f\|^2_{W^{-1,q}(\Omega)} \right\}. \tag{4}$$

Obţinem astfel problema duală aproximante asociată problemei (2)

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \|y^* + f\|^2_{W^{-1,q}(\Omega)} : y^* \in C_k^* \right\}. \tag{5}$$

Teorema 2.4. *Fie $\bar{y}_k$ soluţiile problemelor aproximante* (2) *şi $\bar{y}_k^*$ soluţia problemei duale aproximantă* (5). *Atunci relaţia dintre cele două soluţii este dată de formula*

$$\bar{y}_k = J^{-1}(\bar{y}_k^* + f) \tag{6}$$

unde J este aplicaţia de dualitate $J : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,q}(\Omega)$. Mai mult, $(\bar{y}_k^*, \bar{y}_k) = 0$.

Observaţia 2.5. Deoarece $\bar{y}_k^* \in C_k^*$, conform Lemei 2.3, rezultă $\alpha_i^* \bar{y}_k(x_i) = 0, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k$. În concluzie, multiplicatorii lui Lagrange α_i^* sunt nuli dacă $\bar{y}_k(x_i) > 0$ şi pot fi pozitivi doar când restricţia este activă, adică $\bar{y}_k(x_i) = 0$.

2.2 Metoda de dualitate pentru probleme cu obstacol general

Extindem acum metoda bazată pe dualitate la cazul cu obstacol general. Vom aplica o reducere a cazului de obstacol general la cazul obstacolului nul, prezentat anterior. În acest scop, arătăm întâi că putem înlocui obstacolul iniţial cu un obstacol cu urmă nulă pe frontieră. Soluţia problemei obţinute coincide cu cea a problemei iniţiale. Ulterior, putem efectua o translaţie la cazul obstacolului nul şi putem aplica toată teoria dezvoltată în secţiunea anterioară.

Considerăm următoarea problemă de obstacol

$$\min\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla y|^2 - \int_\Omega fy \ \ : \ y \in K_\psi\right\}, \tag{7}$$

unde $K_\psi = \{y \in H_0^1(\Omega) : y \geq \psi\}$, $\psi \in H^1(\Omega)$, $\psi|_{\partial\Omega} \leq 0$ şi $f \in L^2(\Omega)$.

Unica soluţie a problemei (7) aparţine lui $H^2(\Omega)$.

Lema 2.6. *Fie y_ψ soluţia problemei* (7) *şi $\hat{y}$ soluţia problemei*

$$\begin{aligned} -\Delta\hat{y} &= f, \quad \text{pe } \Omega\,, \\ \hat{y} &= 0, \quad \text{pe } \partial\Omega\,, \end{aligned} \tag{8}$$

Atunci $y_\psi \geq \hat{y}$ aproape peste tot pe Ω.

Problema (7) *în care înlocuim ψ cu $\hat{\psi} = \max\{\hat{y}, \psi\} \in H_0^1(\Omega)$ are aceeaşi soluţie y_ψ.*

Prin translaţie, problema cu obstacol nul pe care o folosim, este

$$\min_{y\in K_0}\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla y|^2 - \int_\Omega fy + \int_\Omega \nabla\hat{\psi}\nabla y\right\}. \tag{9}$$

unde $K_0 = \{y \in H_0^1(\Omega) : y \geq 0 \ \text{ a.p.t. } \ \Omega\} = (H_0^1(\Omega))^+$.

Problema admite soluţie unică, deoarece funcţionala $\int_\Omega (fy - \nabla\hat{\psi}\nabla y)$ este liniară. Fie y_0 această soluţie.

Propozitia 2.7. *Soluţia problemei* (7) *se calculează adunând la y_0 pe $\hat{\psi}$, adică*

$$y_\psi = y_0 + \hat{\psi}\,. \tag{10}$$

Pentru a aplica rezultatele de mai sus, impunem acum condiţia $p > dim\ \Omega$, deci vom considera că Ω are dimensiunea 1. Astfel ne stabilim în cadrul familiar al spaţiului Sobolev $H_0^1(\Omega)$ (deci $p = 2$).

Definim $\hat{f} \in H^{-1}(\Omega)$ prin $(\hat{f}, y)_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega (fy - \nabla\hat{\psi}\nabla y), \quad \forall y \in H_0^1(\Omega)$. Considerăm problema aproximantă

$$\min\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla y|^2 - (\hat{f}, y)_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}, \ : \ y \in C_k\right\}, \tag{11}$$

unde $C_k = \{y \in H_0^1(\Omega) : y(x_i) \geq 0, \forall i = 1, 2, \ldots, k\}$ şi $\{x_i\}_i$ este o mulţime densă în Ω.

Propozitia 2.8. *Problema* (11) *admite soluţia unică $y_k^0 \in C_k$.*

Folosind Teorema de scufundare Sobolev şi slaba semicontinuitate a normei se poate demonstra rezultatul următor, folosind tehnici similare celor din demonstraţia Teoremei 2.2.

Corolarul 2.9. *Şirul* $\{y_k^0\}_k$ *soluţiilor problemelor* (11)*, pentru* $k \in \mathbb{N}$*, este tare convergent în* $H_0^1(\Omega)$ *la unica soluţie* y_0 *a problemei* (9)*.*

Aplicând Teorema lui Fenchel problemei (11) obţinem problema duală

$$\min \left\{ \frac{1}{2} |y^* + \hat{f}|^2_{H^{-1}(\Omega)} \ : \ y^* \in C_k^* \right\}, \tag{12}$$

unde arătăm că $C_k^* = \{y^* \in H^{-1}(\Omega) : y^* = \sum_{i=1}^k \alpha_i \delta_{x_i}, \alpha_i \geq 0\}$ este conul dual.

Problema (12) se explicitează ca o problemă de minimizare pătratică care se rezolvă cu `Matlab`.

Observaţia 2.10. Fie $\hat{y}_k^*$ soluţia problemei duale aproximante (12). Cum $\hat{y}_k^* \in C_k^*$, este suficient să calculăm coeficienţii α_i^*, datorită formulei formei conului dual. Soluţia y_k^0 problemei aproximante (11) este calculată folosind egalitatea $y_k^0 = J^{-1}(\hat{y}_k^* + \hat{f})$ (Teorema 2.4), unde J este aplicaţia de dualitate $J : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ şi de asemenea avem $\alpha_i^* y_k(x_i) = 0, \quad \forall i = \overline{1, k}$.

Obţinem formula pentru soluţia problemei aproximante, notată cu y_k^0,

$$y_k^0 = \sum_{i=1}^k \alpha_i^* J^{-1}(\delta_{x_i}) + J^{-1}(\hat{f})$$

folosind aici faptul că aplicaţia de dualitate $J : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ este definită prin $J(y) = -y''$. Atunci aplicând (10) găsim soluţia aproximantă a problemei cu obstacol general (7).

2.3 Exemple numerice

În această secţiune aplicăm rezultatele teoretice de mai sus pentru a rezolva problemele de obstacol de ordinul doi în dimensiune unu. Comentăm aici pe scurt doar unul din exemplele din teză.

Exemplul 2.1. Considerăm acum un exemplu cu obstacol general:

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla y|^2 - \int_\Omega f y \ : \ y \in K_\psi \right\}, \tag{13}$$

unde $K_\psi = \{y \in H_0^1(\Omega) : y \geq \psi\}$, $\Omega = (-1, 1)$, $\psi(x) = -x^2 + 0.5$ şi

$$f(x) = \begin{cases} -10, & |x| > 1/4\,, \\ 10 - x^2, & |x| \leq 1/4\,. \end{cases}$$

Reprezentăm în Figura 1 soluţia problemei duale aproximative, iar în Figura 2 obstacolul ψ şi două soluţii aproximative, prima calculată cu metoda bazată pe dualitate şi cealaltă calculată cu metoda `IPOPT` [137]. Cele două soluţiii coincid grafic.

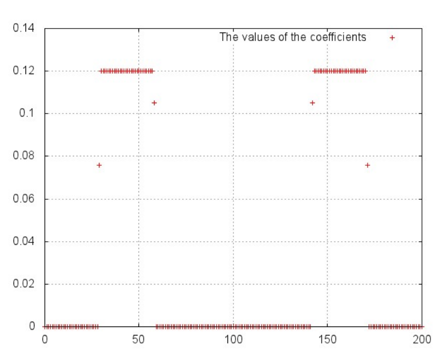

Figura 1: Soluţia problemei duale aproximative.

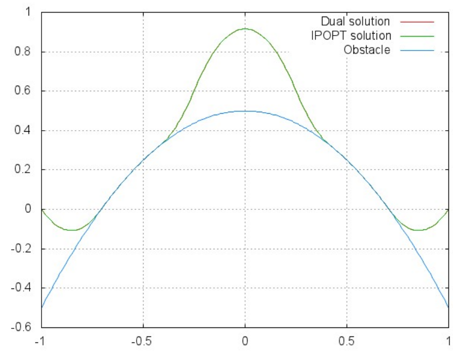

Figura 2: Soluţia prin metoda de dualitate şi soluţia metodei `IPOPT`.

3 Probleme de ordin patru

Problema obstacolului pentru operatorul biharmonic este un subiect intens exploatat în cercetarea matematică. Printre numeroasele lucrări care au tratat acestă problemă putem aminti articolul lui Caffarelli, Friedman şi Torelli [37], An, Li şi Li [8], Anedda [10], Landau şi Lifshitz [89], Brezis şi Stampacchia [33] sau Comodi [45].

Dualitatea este o metodă este o metodă cunoscută în teoria plăcilor. Amintim articolul lui Yau şi Gao [141] în care este stabilit un principiu generalizat de dualitate, bazat pe o versiune neliniară a teoriei dualităţii lui Rockafellar [118], cu ajutorul căruia se obţine pentru problema de obstacol von Kármán o problemă duală semi-pătratică. Reamintim lucrările lui Neittaanmaki, Sprekels şi Tiba [107] şi Sprekels şi Tiba [128] în care sunt studiate arcele Kirchhoff-Love, obţinându-se formule explicite ale soluţiei.

3.1 Problema plăcii aşezate cu obstacol nul

Considerăm că $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, cu $n \leq 3$, este un domeniu cu proprietatea tare Lipschitz locală. Notăm cu V spaţiul $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ înzestrat cu produsul scalar $(u,v)_V = \int_\Omega \Delta u \Delta v$. Norma $|y|_V = \left(\int_\Omega (\Delta y)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ este echivalentă cu norma uzuală din spaţiul Sobolev.

Considerăm următoarea problemă de obstacol

$$\min_{y \in K} \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega (\Delta y)^2 - \int_\Omega f y \right\} \tag{14}$$

unde $f \in L^2(\Omega)$ şi $K = \{y \in V : y \geq 0 \ \text{ in } \ \Omega\}$, care este un model simplificat pentru placa aşezată.

Conform Teoremei de scufundare Sobolev, şi folosind faptul că $dim\ \Omega \leq 3$, avem $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$. Atunci se poate defini următoarea problemă aproximantă

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega (\Delta y)^2 - \int_\Omega fy \ \ : \ y \in V; y(x_i) \geq 0, i = 1, 2, \ldots, k \right\} \tag{15}$$

unde $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \Omega$ este o mulţime densă în Ω. Pentru orice $k \in \mathbb{N}$, notăm conul închis şi convex $C_k = \{y \in V : y(x_i) \geq 0, i = 1, 2, \ldots, k\}$.

Propozitia 3.1. *Problema* (14) *are o unică soluţie* $\bar{y} \in K$ *şi problema* (15) *admite soluţia unică* $\bar{y}_k \in C_k$*, pentru orice* $k \in \mathbb{N}$.

Mai mult, obţinem următorul rezultat de aproximare

Teorema 3.2. *Şirul* $\{\bar{y}_k\}_k$ *soluţiilor problemelor* (15)*, pentru* $k \in \mathbb{N}$*, este tare convergent în* V *la unica soluţie* $\bar{y}$ *a problemei* (14).

Notăm V^* spaţiul dual al lui V. Observăm că $H^{-2}(\Omega)$ nu este dens în V^*, deoarece nici $H_0^2(\Omega)$ nu este dens în V. Dar incluziunea $H_0^2(\Omega) \subset V$ este continuă, atunci pentru orice $y^* \in V^*$ restricţia $y^*|_{H_0^2(\Omega)}$ aparţine lui $H^{-2}(\Omega)$. Astfel obţinem următorul rezultat

Lema 3.3. *Aplicaţia de dualitate* $J : V \to V^*$ *poate fi definită prin*

$$J(v) = \Delta\Delta v.$$

Conform Teoremei lui Fenchel, problema duală aproximantă asociată problemei (15) este

$$\min \left\{ \frac{1}{2} |y^* + f|_{V^*}^2 : y^* \in C_k^* \right\}. \tag{16}$$

unde arătăm că $C_k^* = \left\{ u = \sum_{i=1}^k \alpha_i \delta_{x_i} : \alpha_i \geq 0 \right\}$, ca în Lema 2.3.

Teorema 3.4. *Considerăm* $\bar{y}_k$ *soluţia problemei aproximante* (15) *şi* $\bar{y}_k^*$ *soluţia problemei duale aproximante* (16)*. Atunci* $\bar{y}_k = J^{-1}(\bar{y}_k^* + f)$ *unde* J *este aplicaţia de dualitate* $J : V \to V^*$.

În plus, $(\bar{y}_k^*, \bar{y}_k)_{V^* \times V} = 0$.

Observaţia 3.5. Avem din nou $\alpha_i^* \bar{y}_k(x_i) = 0, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k$.

3.2 Problema plăcii încastrate

Ne îndreptăm acum atenţia spre problema plăcii cu margini încastrate. Vom dezvolta o teorie similară cu cea expusă anterior. Există diferenţe faţă de cele prezentate anterior datorită faptul că principiul de maxim nu mai este valabil în general pentru condiţiile la limită

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \text{pe } \partial\Omega.$$

Considerăm $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, cu $n \leq 3$, o mulţime deschisă şi mărginită cu prorietatea tare Lipschitz locală. În această secţiune, notăm cu V spaţiul Hilbert $H_0^2(\Omega)$ înzerstrat cu produsul scalar $(u,v)_V = \int_\Omega \Delta u \Delta v$.

Studiem problema de obstacol

$$\min_{y \in \mathcal{K}} \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega (\Delta y)^2 - \int_\Omega f y \right\} \tag{17}$$

unde $f \in L^2(\Omega)$ şi $\mathcal{K} = \{y \in V : y \geq 0 \text{ in } \Omega\}$.

Problema (17) admite soluţia unică $\bar{y} \in \mathcal{K}$.

Cu Teorema de scufundare Sobolev şi folosind faptul că $dim\ \Omega \leq 3$, avem $H_0^2(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$, lucru care ne împuterniceşte să considerăm următoarea problemă aproximantă

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega (\Delta y)^2 - \int_\Omega f y \ \ : \ y \in V; y(x_i) \geq 0, i = 1, 2, \ldots, k \right\} \tag{18}$$

unde $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \Omega$ este mulţime densă în Ω. Pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$, considerăm conul închis şi convex $\mathcal{C}_k = \{y \in V : y(x_i) \geq 0, i = 1, 2, \ldots, k\}$.

Problema aproximantă (18) are soluţia unică $\bar{y}_k \in \mathcal{C}_k$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Şi în acest caz, obţinem rezultatul de aproximare

Teorema 3.6. *Şirul* $\{\bar{y}_k\}_k$ *al soluţiilor problemelor* (18)*, indexat după* $k \in \mathbb{N}$*, este tare convergent în* V *la unica soluţie* $\bar{y}$ *a problemei* (17)*.*

Problema duală aproximantă asociată problemei (18) este

$$\min \left\{ \frac{1}{2} |y^* + f|_{V^*}^2 : y^* \in \mathcal{C}_k^* \right\}. \tag{19}$$

Demonstrăm un rezultat similar cu cel obţinut în cazul plăcii simplu aşezate.

Teorema 3.7. *Considerăm* $\bar{y}_k$ *soluţia problemei primale aproximante* (18) *şi* $\bar{y}_k^*$ *soluţia problemei duale aproximante* (19)*. Atunci* $\bar{y}_k = J^{-1}(\bar{y}_k^* + f)$ *unde* J *este aplicaţia de dualitate* $J : V \to V^*$*. Mai mult,* $(\bar{y}_k^*, \bar{y}_k) = 0$*.*

Observaţia 3.8. De asemenea putem observa că şi în acest caz este valabilă relaţia de complementaritate. $\alpha_i^* \bar{y}_k(x_i) = 0, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k$.

3.3 Aplicaţii numerice şi comparaţia cu alte metode

Detaliem aici două exemple numerice referitoare la placa aşezată şi comparăm rezultatele cu alte metode de rezolvare numerică. În teză, se indică şi exemple referitoare la placa încastrată.

Table 1: Valorile optime ale funcţionalei energie pentru diferite reţele.

k	205	682	1031	1431	1912	2797
IPOPT	-55.8069	-57.9099	-58.168	-58.3493	-58.4457	-58.5392
Dual	-78.0675	-80.5279	-80.8705	-81.113	-81.2397	-81.3977

Exemplul 3.1. Luăm Ω discul unitate în $\mathbb{R}^2$ şi considerăm problema cu obstacol nul

$$\min_{y\in K}\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega(\Delta y)^2-\int_\Omega fy\right\} \tag{20}$$

unde $K=\{y\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega): y\geq 0 \text{ in } \Omega\}$ şi $f(x_1,x_2)=100(-x_1^2+3x_1)$.

Calculăm două soluţii. Cea obţinută prin metoda de dualitate este reprezentată în Figura 3 şi cea dată de metoda directă (`IPOPT` [137]) este reprezentată în Figura 4. Observăm că cele două soluţii nu coincid.

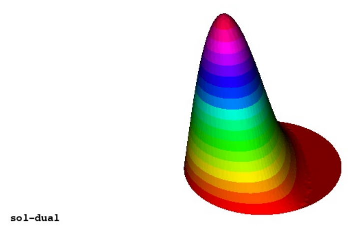

Figura 3: Soluţia obţinută cu ajutorul metodei de dualitate.

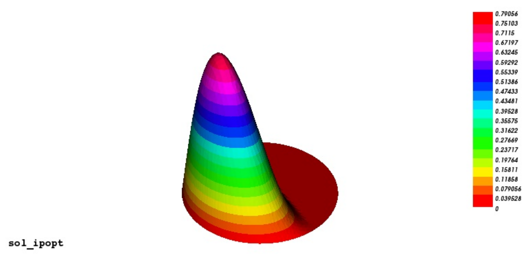

Figura 4: Soluţia obţinută prin metoda directă.

Cu ajutorul Tabelului 1 conchidem că valorile optime ale funcţionalei energie sunt mai mici atunci când soluţia este calculată prin metoda de dualitate. Aceasta arată că metoda de dualitate produce o soluţie mai precisă.

Exemplul 3.2. În cazul operatorilor de ordin patru, procedura de reducere la cazul obstacolului nul generalizează ideile de la operatorii de ordin doi, apărând dificultăţi suplimentare datorită pierderii proprietăţilor de regularitate.

Considerăm $\Omega=(0,2)\times(0,1)$ şi luăm $f(r)=-10(-2r^2+20r-2)$ şi obstacolul general $\psi(r)=-r^2+2r-1.5$, unde $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

Reprezentăm soluţia obţinută prin dualitate în Figura 5, iar în Figura 6 soluţia obţinută cu metoda de optimizare `IPOPT` [137].

Deşi soluţiile sunt diferite grafic, Tabelul 2 arată că, în cazul metodei bazată pe dualitate, valorile optimale ale funcţionalei energie sunt mai mici decât în cazul soluţiei obţinute prin metoda de optimizare `IPOPT` [137].

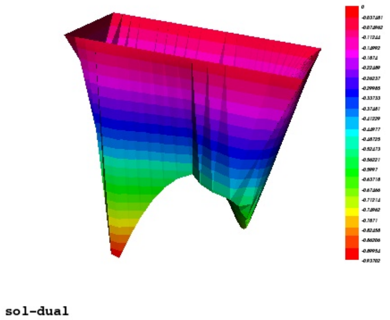

Figura 5: Soluţia obţinută prin metoda duală.

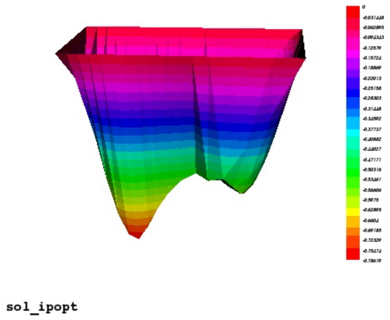

Figura 6: Soluţia obţinută prin metoda directă.

Table 2: Valorile optimale ale energiei obţinute pentru diverse valori ale lui k.

k	322	484	716	1430	1920	2568
IPOPT	-105.675	-108.804	-107.047	-104.101	-103.9	-103.802
Dual	-118.551	-121.568	-121.447	-118.268	-118.135	-118.143

Această lucrare a fost realizată în cadrul proiectului "Doctoratul în Ştiinţe fundamentale – Începutul unei cariere de vârf în cercetare", cofinanţat de Uniunea Europeană şi Guvernul României prin Programul Operaţional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013, contractul de finanţare nr. POSDRU/107/1.5/S/82514.

Bibliografie

[1] D. R. Adams, V. Hrynkiv, and S. Lenhart. Optimal control of a biharmonic obstacle problem. In Ari Laptev, editor, *Around the Research of Vladimir Maz'ya III*, volume 13 of *International Mathematical Series*, pages 1–24. Springer New York, 2010.

[2] R. A. Adams. *Sobolev spaces.* Acad. Press, New York, London, Torento, 1975.

[3] R. A. Adams and J. J.F. Fournier. *Sobolev spaces*, volume 140. Academic Press, 2003.

[4] A. Addou, J. Zahi, et al. Regularization of a unilateral obstacle problem on the boundary. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2003(4):241–250, 2003.

[5] S. Agmon. *Lectures on Elliptic Boundary Value Problems.* D. Van Nostrand Company, Princeton, New Jersey, 1965.

[6] E. A. Al-Said, M. A. Noor, and T. M. Rassias. Cubic splines method for solving fourth-order obstacle problems. *Applied mathematics and computation*, 174(1):180–187, 2006.

[7] Ya.I. Alber. The regularization method for variational inequalities with nonsmooth unbounded operators in banach space. *Applied Mathematics Letters*, 6(4):63 – 68, 1993.

[8] Li K. An, R. and Y. Li. Solvability of the 3d rotating Navier–Stokes equations coupled with a 2d biharmonic problem with obstacles and gradient restriction. *Applied Mathematical Modelling*, 33:2897–2906, 2009.

[9] R. An. Discontinuous Galerkin finite element method for the fourth-order obstacle problem. *Applied Mathematics and Computation*, 209(2):351–355, 2009.

[10] C. Anedda. Maximization and minimization in problems involving the bi-Laplacian. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 190(1):145–156, 2011.

[11] V. Arnautu, H. Langmach, J. Sprekels, and D. Tiba. On the approximation and the optimization of plates. *Numerical functional analysis and optimization*, 21(3-4):337–354, 2000.

[12] V. Arnăutu and P. Neittaanmäki. *Optimal control from theory to computer programs.* Springer, 2003.

[13] D. N. Arnold. An interior penalty finite element method with discontinuous elements. *SIAM journal on numerical analysis*, 19(4):742–760, 1982.

[14] H. Attouch and Brézis H. Duality for the sum of convex functions in general banach spaces. In Jorge Alberto Barroso, editor, *Aspects of Mathematics and its Applications*, volume 34 of *North-Holland Mathematical Library*, pages 125 – 133. Elsevier, 1986.

[15] O. Axelsson and V. A. Barker. *Finite element solution of boundary value problems: theory and computation.* Academic Press, Orlando, Florida, 1984.

[16] M. B. Ayed and K. E. Mehdi. On a biharmonic equation involving nearly critical exponent. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, 13(4):485–509, 2006.

[17] D. Azé. Duality for the sum of convex functions in general normed spaces. *Archiv der Mathematik*, 62(6):554–561, 1994.

[18] Rizwan B. Penalty method for variational inequalities. *Advances in Applied Mathematics*, 18(4):423 – 431, 1997.

[19] L. Badea. One- and two-level domain decomposition methods for nonlinear problems. *Proceedings of the First International Conference on Parallel, Distributed and Grid Computing for Engineering*, (6), 2009.

[20] C. Baiocchi. Su un problema di frontiera libera connesso a questioni di idraulica. *Annali di matematica pura ed applicata*, 92(1):107–127, 1972.

[21] V. Barbu. *Optimal control of variational inequalities.* Research notes in mathematics. Pitman Advanced Pub. Program, 1984.

[22] V. Barbu and Th. Precupanu. *Convexity and optimization in* B*anach spaces.* Editura Academiei, Bucureşti, 1978.

[23] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, and Ch. M. Shetty. *Nonlinear programming: theory and algorithms.* John Wiley and Sons, New York, 2013.

[24] H. Begehr. Dirichlet problems for the biharmonic equation. *Gen. Math*, 13:65–72, 2005.

[25] E. M. Behrens and J. Guzmán. A mixed method for the biharmonic problem based on a system of first-order equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 49(2):789–817, 2011.

[26] M. Biroli. A de Giorgi-Nash-Moser result for a variational inequality. *Boll. UMI*, 16(5):598–605, 1979.

[27] L. Boccardo. Régularité $W_0^{1,p}$, $(2 < p < +\infty)$ de la solution d'un problème unilatéral. In *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, volume 3, pages 69–74. Université Paul Sabatier, 1981.

[28] S. C. Brenner, L. Sung, H. Zhang, and Y. Zhang. A Morley finite element method for the displacement obstacle problem of clamped kirchhoff plates. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 254:31–42, 2013.

[29] H. Brézis. Seuil de régularité pour certains problèmes unilatéraux. *C. R. Acad. Sci*, 273:35–37, 1971.

[30] H. Brézis. *Functional analysis,* S*obolev spaces and partial differential equations.* Springer, New York, 2011.

[31] H. Brézis and G. Stampacchia. Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 96:153–180, 1968.

[32] H. Brezis and G. Stampacchia. The hodograph method in fluid-dynamics in the light of variational inequalities. In Paul Germain and Bernard Nayroles, editors, *Applications of Methods of Functional Analysis to Problems in Mechanics*, volume 503 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 239–257. Springer Berlin Heidelberg, 1976.

[33] H. Brezis and G. Stampacchia. Remarks on some fourth order variational inequalities. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, 4(2):363–371, 1977.

[34] M. Burger, N. Matevosyan, and M.-T. Wolfram. A level set based shape optimization method for an elliptic obstacle problem. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 21(04):619–649, 2011.

[35] R. H. Byrd, G. Liu, and J. Nocedal. On the local behavior of an interior point method for nonlinear programming. *Numerical analysis*, 1997:37–56, 1997.

[36] L. A. Caffarelli and A. Friedman. The obstacle problem for the biharmonic operator. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, 6(1):151–184, 1979.

[37] L. A Caffarelli, A. Friedman, A. Torelli, et al. The two-obstacle problem for the biharmonic operator. *Pacific Journal of Mathematics*, 103(2):325–335, 1982.

[38] L.A. Caffarelli. The obstacle problem revisited. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 4(4-5):383–402, 1998.

[39] J. Céa. *Optimisation:* T*héorie et algorithmes.* Dunod, Paris, 1971.

[40] M. Chicco. Appartenenza ad $W^{1,p}(\omega)$, $(2 < p < +\infty)$ delle soluzioni di una classe di disequazioni variazionali ellittiche. *Bollettino Della Unione Matematica Italiana*, 3(3-B):137–148, 1984.

[41] J.A.D. Chuquipoma, C.A. Raposo, and W.D. Bastos. Optimal control problem for deflection plate with crack. *Journal of dynamical and control systems*, 18(3):397–417, 2012.

[42] P. G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems.* Elsevier, 1978.

[43] P.G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems.* Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.

[44] Philippe G Ciarlet. *Numerical analysis of the finite element method.* Les Presses de L'Université de Montréal, 1976.

[45] M.I. Comodi. Approximation of a bending plate problem with a boundary unilateral constraint. *Numerische Mathematik*, 47(3):435–458, 1985.

[46] A. R. Conn, N. I. M. Gould, and P. L. Toint. *Trust Region Methods.* MOS-SIAM Series on Optimization. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.

[47] A. Dall'Acqua and G. Sweers. The clamped-plate equation for the Limaçon. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 184(3):361–374, 2005.

[48] M. Dauge. *Elliptic boundary value problems on corner domains.* Springer Berlin Heidelberg, 1988.

[49] Z. Dostál. *Optimal quadratic programming algorithms: with applications to variational inequalities*, volume 23. Springer, 2009.

[50] G. Duvaut and J. L. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique*, volume 18. Dunod Paris, 1972.

[51] C. M. Elliott and J. R. Ockendon. *Weak and variational methods for moving boundary problems*, volume 59. Pitman Boston, 1982.

[52] A. V. Fiacco and G. P. McCormick. *Nonlinear programming: sequential unconstrained minimization techniques*, volume 4. Siam, Philadelphia, PA. Reprint of the 1968 original., 1990.

[53] G. Fichera. Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: il problema di signorini con ambigue condizioni al contorno, atti acc. *Naz. Lincei, Memoria presentata il*, 1964.

[54] G. Fichera. Boundary value problems of elasticity with unilateral constraints. In *Linear Theories of Elasticity and Thermoelasticity*, pages 391–424. Springer, 1973.

[55] R. Fletcher. *Practical Methods of Optimization*. John Wiley Sons, Ltd, 2000.

[56] A. Forsgren, P. E. Gill, and M. H. Wright. Interior methods for nonlinear optimization. *SIAM review*, 44(4):525–597, 2002.

[57] P. Forsyth and K. Vetzal. Quadratic convergence for valuing american options using a penalty method. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 23(6):2095–2122, 2002.

[58] J. Frehse. Zum differenzierbarkeitsproblem bei variationsungleichungen höherer ordnung. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 36(1):140–149, 1971.

[59] J. Frehse. On the regularity of the solution of the biharmonic variational inequality. *Manuscripta Mathematica*, 9(1):91–103, 1973.

[60] J. Frehse. On the smoothness of solutions of variational inequalities with obstacles. *Banach Center Publications*, 10(1):87–128, 1983.

[61] A. Friedman. *Variational Principles and Free Boundary Problems*. Wiley, New York, 1982.

[62] D. Gabay and B. Mercier. A dual algorithm for the solution of nonlinear variational problems via finite element approximation. *Computers and Mathematics with Applications*, 2(1):17–40, 1976.

[63] F. Gazzola, H.-C. Grunau, and G. Sweers. *Polyharmonic boundary value problems: positivity preserving and nonlinear higher order elliptic equations in bounded domains*. Number 1991. Springer, 2010.

[64] F. Gazzola, H.-Ch. Grunau, and M. Squassina. Existence and nonexistence results for critical growth biharmonic elliptic equations. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 18(2):117–143, 2003.

[65] C. Gerhardt. Hypersurface of prescriped mean ccurvature over obstacles. *Math Z.*, 133:169–185, 1973.

[66] M. Giaquinta and L. Pepe. Esistenza e regolarità per il problema dell'area minima con ostacoli in n variabili. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 3(25):481–507, 1971.

[67] P.E. Gill, W. Murray, and M.H. Wright. *Practical optimization*. Academic Press, 1981.

[68] E. Giusti. Superfici minime cartesiane con ostaeoli diseontinui. *Arch. rat. Mech. Analysis*, 35:47–82, 1969.

[69] R. Glowinski. *Numerical methods for nonlinear variational problems*, volume 4. Springer, 1984.

[70] N. I.M. Gould, D. Orban, A. Sartenaer, and P. L. Toint. Superlinear convergence of primal-dual interior point algorithms for nonlinear programming. *SIAM Journal on Optimization*, 11(4):974–1002, 2001.

[71] R. Griesse and K. Kunisch. A semi-smooth Newton method for solving elliptic equations with gradient constraints. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 43(02):209–238, 2009.

[72] P. Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains*, volume 24. Pitman Advanced Publishing Program, Boston, MA, 1985.

[73] I. Griva, S. G. Nash, and A. Sofer. *Linear and nonlinear optimization*. Siam, 2009.

[74] P. Hartman and G. Stampacchia. On some non-linear elliptic differential functional equations. *Acta Math.*, 115:271–310, 1966.

[75] J. Haslinger and R. A. E. Mäkinen. *Introduction to Shape Optimization*. SIAM, Philadelphia, PA, 2003.

[76] F. Hecht. New development in Freefem++. *J. Numer. Math.*, 20(3-4):251–265, 2012.

[77] M.R. Hestenes. Multiplier and gradient methods. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 4(5):303–320, 1969.

[78] M. Hintermüller and S. Rösel. A duality-based path-following semismooth Newton method for elasto-plastic contact problems. IFB-Report 70, Institute of Mathematics and Scientific Computing, University of Graz, 09 2013.

[79] K. Ito and K. Kunisch. Semi–smooth newton methods for variational inequalities of the first kind. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 37(01):41–62, 2003.

[80] K. Ito and K. Kunisch. *Lagrange multiplier approach to variational problems and applications*. Advances in design and control. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008.

[81] V. V. Karachik and S. Abdoulaev. On the solvability conditions for the Neumann boundary value problem. *British Journal of Mathematics and Computer Science*, 3(4):680–690, 2013.

[82] V.V. Karachik, B. Kh. Turmetov, and A. Bekaeva. Solvability conditions of the Neumann boundary value problem for the biharmonic equation in the unit ball. *Int. J. Pure Appl. Math*, 81(3):487–495, 2012.

[83] N. Karmarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming. In *Proceedings of the sixteenth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 302–311. ACM, 1984.

[84] S. Kesavan. *Topics in functional analysis and applications*. Wiley New York, 1989.

[85] D. Kinderlehrer. The coincidence set of solutions of certain variational inequalities. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 40(3):231–250, 1971.

[86] D. Kinderlehrer. Variational inequalities with lower dimensional obstacles. *Israel Journal of Mathematics*, 10(3):339–348, 1971.

[87] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia. *An introduction to variational inequalities and their applications*, volume 31. Siam, 2000.

[88] H. W. Kuhn and A. W. Tucker. Nonlinear programming. In *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, pages 481–492, Berkeley, Calif., 1951. University of California Press.

[89] L. D. Landau, E.M. Lifshitz, J.B. Sykes, W.H. Reid, and E. H. Dill. Theory of elasticity: Vol. 7 of course of theoretical physics. *Physics Today*, 13(7):44–46, 2009.

[90] H. Lewy and G. Stampacchia. On the regularity of the solution of a variational inequality. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 22(2):153–188, 1969.

[91] A. Léger and C. Pozzolini. Sur la zone de contact entre une plaque élastique et un obstacle rigide. *Comptes Rendus Mécanique*, 335(3):144 – 149, 2007.

[92] J. L. Lions. *Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires*. Dunod Paris, 1969.

[93] J. L. Lions and G. Stampacchia. Variational inequalities. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 20(3):493–519, 1967.

[94] J.L. Lions and G. Duvaut. *Inequalities in mechanics and physics.* Springer, 1976.

[95] F. A Lootsma. Hessian matrices of penalty functions for solving constrained-optimization problems. *Philips Res. Rep.*, 24:322–330, 1969.

[96] A. E. H. Love. On the small free vibrations and deformations of elastic shells. *Philosophical trans. of the Royal Society (London), Série A*, vol. 179(17):491–546, January 1888.

[97] J. Lovíšek. Duality in the obstacle and unilateral problem for the biharmonic operator. *Aplikace matematiky*, 26(4):291–303, 1981.

[98] MATLAB. *version 7.10.0 (R2010a).* The MathWorks Inc., Natick, Massachusetts, 2010.

[99] V.V. Meleshko. Biharmonic problem in a rectangle. *Applied Scientific Research*, 58(1-4):217–249, 1997.

[100] D. R. Merluşcă. A duality algorithm for the obstacle problem. *Annals of the Academy of Romanian Scientists*, 5(1–2):209–215, 2013.

[101] D. R. Merluşcă. A duality-type method for the obstacle problem. *Analele Şiintifice Univ. Ovidius Constanţa*, 21(3):181–195, 2013.

[102] D. R. Merluşcă. A duality-type method for the fourth order obstacle problem. *U.P.B. Sci. Bull., Series A.*, 76(2):147–158, 2014.

[103] D. R. Merluşcă. Application of the Fenchel theorem to the obstacle problem. In Barbara Kaltenbacher et al., editor, *System Modeling and Optimization*, volume System Modeling and Optimization of *IFIP Advances in Information and Communication Technology*, pages 179–186. Springer Verlag, to appear, 2014.

[104] C. M. Murea and D. Tiba. A direct algorithm in some free boundary problems. *BCAM Publications*, 2012.

[105] C. M. Murea and D. Tiba. A penalization method for the elliptic bilateral obstacle problem. In Barbara Kaltenbacher et al., editor, *System Modeling and Optimization*, volume System Modeling and Optimization of *IFIP Advances in Information and Communication Technology*, pages 187–196. Springer Verlag, to appear, 2014.

[106] W. Murray. Analytical expressions for the eigenvalues and eigenvectors of the hessian matrices of barrier and penalty functions. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 7(3):189–196, 1971.

[107] P. Neittaanmaki, J. Sprekels, and D. Tiba. *Optimization of elliptic systems*. Springer, 2006.

[108] J.C.C. Nitsche. Variational problems with inequalities as boundary conditions or How to fashion a cheap hat for giacometti's brother. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 35(2):83–113, 1969.

[109] J. T. Oden and J. N. Reddy. *Variational methods in theoretical mechanics*, volume 1. 1976.

[110] R. Pei. Existence of solutions for a class of biharmonic equations with the Navier boundary value condition. *Boundary Value Problems*, 2012(1), 2012.

[111] P. Peisker. A multilevel algorithm for the biharmonic problem. *Numerische Mathematik*, 46(4):623–634, 1985.

[112] F.A. Pérez, J.M. Cascón, and L. Ferragut. A numerical adaptive algorithm for the obstacle problem. In *Computational Science-ICCS 2004*, pages 130–137. Springer, 2004.

[113] A. Poullikkas, A. Karageorghis, and G. Georgiou. Methods of fundamental solutions for harmonic and biharmonic boundary value problems. *Computational Mechanics*, 21(4-5):416–423, 1998.

[114] M. J. D. Powell. A method for nonlinear constraints in minimization problems. In R. Fletcher, editor, *Optimization*, pages 283–298. Academic Press, New York, 1969.

[115] C. Pozzolini and A. Léger. A stability result concerning the obstacle problem for a plate. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 90(6):505–519, 2008.

[116] J. N. Reddy. *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*. CRC Press, 2006.

[117] R. T. Rockafellar. Extension of Fenchel's duality theorem for convex functions. *Duke Mathematical Journal*, 33(1):81–89, 03 1966.

[118] R. T. Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton Landmarks in Mathematics and Physics. Princeton University Press, 1997.

[119] J.-F. Rodrigues. *Obstacle problems in mathematical physics*. Elsevier, 1987.

[120] C. S. Ryoo. Numerical verification of solutions for obstacle problems using a Newton-like method. *Computers and Mathematics with Applications*, 39(3–4):185 – 194, 2000.

[121] H. Benaroya S. M. Han and T. Wei. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. *Journal of Sound and Vibration*, 225(5):935 – 988, 1999.

[122] D. G. Schaeffer. A stability theorem for the obstacle problem. *Advances in mathematics*, 17(1):34–47, 1975.

[123] G. Schmidt and B. N. Khoromskij. Boundary integral equations for the biharmonic dirichlet problem on nonsmooth domains. *J. Integral Equations Applications*, 11(2):217–253, 06 1999.

[124] S. S Siddiqi, G. Akram, and K. Arshad. Solution of fourth order obstacle problems using quintic b-splines. *Applied Mathematical Sciences*, 6(94):4651–4662, 2012.

[125] S. Simons and C. Zălinescu. Fenchel duality, Fitzpatrick functions and maximal monotonicity. *J. Nonlinear Convex Anal.*, 6(1):1–22, 2005.

[126] M. Sofonea and A. Matei. *Variational Inequalities with Applications: A Study of Antiplane Frictional Contact Problems*, volume 18. Springer, 2009.

[127] J. Sprekels and D. Tiba. A duality approach in the optimization of beams and plates. *SIAM journal on control and optimization*, 37(2):486–501, 1999.

[128] J. Sprekels and D. Tiba. Sur les arches lipschitziennes. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 331(2):179–184, 2000.

[129] G. Stampacchia. Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. *Séminaire Jean Leray*, (3):1–77, 1963-1964.

[130] G. Stampacchia. Formes bilineaires coercivitives sur les ensembles convexes. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 258:4413–4416, 1964.

[131] G. Stampacchia. Le problème de dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. *Annales de l'institut Fourier*, 15(1):189–257, 1965.

[132] F. Stenger, Th. Cook, and R. M. Kirby. Sinc solution of biharmonic problems. *Canadian Applied Mathematics Quarterly*, 12(3):371–414, 2004.

[133] R. Tremolieres, J.-L. Lions, and R. Glowinski. *Numerical analysis of variational inequalities*. Elsevier, 2011.

[134] G. M. Troianiello. *Elliptic differential equations and obstacle problems*. Springer, 1987.

[135] M. Tsutsumi and T. Yasuda. Penalty method for variational inequalities and its error estimates. *Funkcialaj Ekvacioj Serio Internacia*, 42:281–290, 1999.

[136] B.K. Turmetov and R.R. Ashurov. On solvability of the Neumann boundary value problem for a non-homogeneous polyharmonic equation in a ball. *Boundary Value Problems*, 2013(1), 2013.

[137] A. Wächter and L. T. Biegler. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Mathematical programming*, 106(1):25–57, 2006.

[138] P. Wilmott. *The mathematics of financial derivatives: a student introduction.* Cambridge University Press, 1995.

[139] M. Wright. The interior-point revolution in optimization: history, recent developments, and lasting consequences. *Bulletin of the American mathematical society*, 42(1):39–56, 2005.

[140] S.J. Wright and J. Nocedal. *Numerical optimization*, volume 2. Springer New York, 1999.

[141] S.-T. Yau and Y. Gao. Obstacle problem for von kármán equations. *Advances in Applied Mathematics*, 13(2):123–141, 1992.

[142] K. Yosida. *Functional Analysis.* Classics in Mathematics. Cambridge University Press, 1995.

[143] C. Zalinescu. *Convex analysis in general vector spaces.* World Scientific, 2002.